

# 矿山变形监测网的图形结构本征

李祎楠<sup>1</sup>, 张鹏飞<sup>1</sup>

(贵州大学矿业学院, 贵州 贵阳 550025)

**摘要:**当前测量数据处理理论已经具备了较完善的理论体系,但是没有严格的从数值上去分析图形结构的本征,本文从监测网平差的角度出发,分三个方面对监测网的图形结构本征进行分析。

**关键词:**最小二乘法;奇异值

中图分类号:X37

文献标识码:A

文章编号:1006-8759(2012)06-0010-04

## THE NATURE MODAL ANALYSIS IN THE COAL MINE TRANSFORMATION MONITORING

LI Yi-nan<sup>1</sup>, ZHANG Peng-fei<sup>1</sup>

(Institute of Mining Technology, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** The current measurement data processing theory has a perfect theory system, but there is no numerical analysis in the graphic structure. This paper, from the perspective of network decoding through three aspects to analysis the graphic structure's intrinsic.

**Keywords:** least square method; singular value

### 前言

矿山沉陷与变形监测是保证矿山安全生产的重要技术手段,矿山沉陷是由采空区引起的围岩力学平衡被破坏造成的地表塌陷及变形现象,发生在采空区上方的地表;矿山变形主要是指各种原因引起的主要井筒位移与变形、露天矿边坡的移动与变形及矿山重要建构物的移动与变形;在矿山建立沉陷与变形的检测体系,对于确保主要井筒、主要建构物、边坡及沉陷区域的地表安全,解释沉陷与变形产生的原因、了解和掌握其规律具有重要意义。

沉陷与变形监测体系包括:设计并建立科学的监测网、监测程序与方法、数据处理与分析方法、分析和预报体制、应急和处理体制等。本文从监测网数据处理的网平差角度出发,分析影响网平差精度的决定性因素。

### 1 当前数据处理理论前沿及存在的问题

在测量数据处理中,存在着大量的非线性参数估计问题,从理论上讲,线性参数估计的理论和方法同样适用于非线性模型的参数估计,但是由于非线性模型关系的复杂性,导致其在估计准则,参数结算和估计质量评价上均与线性参数估计不尽相同。所以必须研究客观事物的非线性本质,建立相应的非线性模型估计理论,而在测量数据处理中应用最为广泛的便是非线性最小二乘估计。

针对最小二乘法抗误差干扰性差这一缺陷,学者提出了稳健估计理论,其目的在于构造某种估计方法,使其对于模型误差,特别是粗差具有较强的抵抗能力。我国学者对这种方法进行了大量的深入研究。其中周江文教授提出等价权的概念,利用等价权将估计化为最小二乘估计,使稳健估计以业已存在的简便的算式在测量计算中得到实现<sup>[1]</sup>;李德仁教授提出用选权迭代法处理粗差的李德仁法<sup>[2]</sup>;杨元喜教授首先研究了相关观测的稳健估计问题,提出了相关等价权的概念,并构造了相关等

价权函数<sup>[3]</sup>;刘经南教授首次从等价方差-协方差的角度研究相关观测的稳健估计问题,并构造了相应的相关等价方差-协方差函数<sup>[4]</sup>。

大地测量中的不适定问题包括病态问题和稚亏问题,它广泛存在于 GPS 数据处理、形变分析、大地测量反演和重力场向下延拓等领域。在拟稳平差思想的启迪下欧吉坤教授提出了选权拟合法解不适定问题<sup>[5]</sup>,解不适定问题应根据具体问题对参数做具体分析,找出合理的权阵或参数约束矩阵,利用统一的解式,可以得到符合客观实际的结果。王振杰教授抓住正则化矩阵的选取和正则化参数的确定这条主线,对大地测量中的不适定问题进行了深入研究,建立起了一套较系统的不适定问题处理理论框架,进一步发展了 TIKHONOV 正则化方法<sup>[6]</sup>。

当前这些数据处理理论已经具备了较完善的理论体系,但是没有严格的从数值上去分析图形结构的本征,本文从监测网平差的角度出发,分三个方面对监测网的图形结构本征进行分析。

## 2 最小二乘与奇异值分解的关系

在信号处理和系统理论中,最常见的线性方程组  $Ax=b$  是超定的和非满秩的,即秩亏缺的,也就是说,矩阵  $A \in C^{m \times n}$  的行数  $m$  比列数  $n$  大,且  $r=\text{rank}(A) < n$ 。令  $A$  的奇异值分解由式  $A=U \Sigma V^H$  给出,其中,  $\Sigma=\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ , ( $\text{diag}$  为在 Matlab 中构造一个对角矩阵)考察:

$$G=V \Sigma^+ U^H \quad (1)$$

式中,由奇异值的性质知道, $G$  是  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆矩阵。因此:

$$\hat{x}=Gb=V \Sigma^+ U^H b \quad (2)$$

给出了最小二乘的最小范数解。此时,解的误差矩阵由下式:

$$\Sigma_{\hat{x}}=(A^H A)^{-1}=V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} V^H \quad (3)$$

给出,式(前式)可表示为:

$$x_{LS}=\sum_{i=1}^r (u_i^H b / \sigma_i) v_i \quad (4)$$

它是最小二乘问题:

$$\min \|Ax-b\|_2 \quad (5)$$

的最小范数解,相应的最小残差为:

$$\rho_{LS}=\|Ax_{LS}-b\|_2=\|[u_{r+1}, \dots, u_m]^H b\|_2 \quad (6)$$

应用奇异值分解求解最小二乘问题的方法常简称为奇异值分解方法。虽然在理论上,当  $i>r$  时奇

异值  $\sigma=0$ ,但是计算出来的奇异值  $\sigma_i, i>r$  并不会等于零,有时甚至表现出比较大的扰动。因此,需要有计算秩  $r$  的估计值  $\hat{r}$  的方法。

在利用最小二乘法解决大地控制网中的测量平差问题时(不考虑权的影响):

$$B^T V=0 \quad (7)$$

$B^T$  的每行表示对应的在参数方向上的基,此式子就表示误差在参数方向上的分量的和为零。

对  $B$  矩阵做奇异值分解:

$$B=U \Sigma V^T \quad (8)$$

将上式代入下式得到:

$$P V=0 \quad (9)$$

其中  $P$  表示在观测值方向上的基,表示为:  $P=B(B^T B)^{-1} B^T$ 。此式子就表示误差在观测值方向上的分量的和为零。因此最小二乘法的平差方法误差在分配上满足以下两个要求:一是  $Pv=0$ ,二是  $B^T v=0$ 。

对于误差分配,计算出误差在参数方向上的分配( $X$ ),以及在观测点与未知点之间观测距离上的误差( $V$ ),然后对  $B$  矩阵进行奇异值分解  $B=U \Sigma V^T$ ,其中  $U, \Sigma, V$  是酉阵,具有对称性,正交性,幂等性。而  $\Sigma=\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ 。则有奇异值的性质,  $A$  的广义逆矩阵  $G$  可表示为:  $G=V \Sigma^+ U^T$ 。

式中,  $\Sigma^+=\text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r, 0, \dots, 0)$ 。则最小二乘最小范数解可表示为:  $\hat{x}=G l=V \Sigma^+ U^T l$ 。

$$\text{写成向量表达形式有: } \hat{x}=\sum_{i=1}^r (u_i^T l / \sigma_i) v_i,$$

$$\text{令 } P_i=v_i u_i^T, \text{ 则有 } \hat{x}=\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} P_i l.$$

其中  $P_i$  为  $n \times n$  矩阵,有  $n$  层基底,在每一层基底上对误差进行  $n \times n$  的分配。最后将  $n$  维空间中的基底相互叠加,得到最后的平差结果。由于在每个基的方向上误差的大小和方向不同,所以相互叠加后,任何一个观测值方向上的误差分量和为 0。

$$\text{由式 } \hat{x}=\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} P_i b \text{ 其中 } P_i=v_i u_i^T, \text{ 以及误差}$$

分配的微观结构可以看出客观影响误差分配的因素是  $\sigma$ 。 $\sigma_i$  越大,则在这个方向上分得的误差分量越小; $\sigma_i$  越小,则放大了这个方向上所得的误差分量。因此,决定平差精度的最重要指标就是系数矩阵  $B$  的奇异值分解  $\sigma$  的好坏,研究  $\sigma$  成了研究网平差结果好坏的最重要的因素。

## 3 监测网的图形结构本征分析

由于监测网的观测值是方向余弦,且观测方程的系数矩阵  $B$  是一个正余弦阵,其结构都是由观测值方向  $\theta$  决定的,为了研究观测值方向  $\theta$  是如何影响  $\sigma$  的,我们从以下三个方面进行讨论:

1、只有两个观测值的情况,固定一个观测值,不断改变另一个观测值的方向,即对  $\theta$  进行间断自取值,其范围是  $0-\pi$ ,观察  $\sigma$  的变化情况。

取二维坐标对  $B$  矩阵进行讨论,固定方向为  $30$  度,  $B$  矩阵结构为:

$$B = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \cos(\theta + 30^\circ) & \sin(\theta + 30^\circ) \end{bmatrix} \quad (10)$$

对  $\theta$  以  $10$  度为采样间隔进行变化,  $0-\pi$  为观察区间,对  $\sigma$  的变化进行作图分析。结果如图 3.1

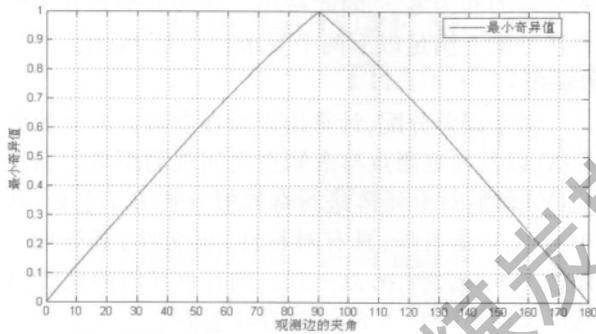


图 3.1 最小奇异值随观测方向改变的变化情况

所示:

通过对图形的分析可以看出,只有两个观测方

向时  $\sigma$  的变化范围为  $0$  至  $1$ ,由公式  $\hat{x} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} P_i b$

可知,此时的  $\sigma$  属于误差放大因子。当两观测值之间夹角为  $0$  度或者  $180$  度时  $\sigma$  的值为  $0$ ,此时误差放大最为严重;当两观测值之间夹角由  $0$  度增加到  $90$  度时,最小奇异值由  $0$  逐渐增加到  $1$ ,对误差的放大作用逐渐减小;当两观测值间夹角为  $90$  度时,最小奇异值为  $1$ ,此时对误差无放大作用;当两观测值之间夹角由  $90$  度增加到  $180$  度时,最小奇异值由  $1$  逐渐减小到  $0$ ,对误差的放大作用逐渐增大。由此可知,当旋转角度与固定角度成相互垂直关系时,  $\sigma$  取得最大值  $1$ ,此时对误差无放大作用。

2、增加观测值的方向,分别将整个坐标系  $0-2\pi$  平均分为  $2$  至  $n$  块来分析,也就是将观测方向从两个方向逐渐增加到  $n$  个观测方向,此时是将  $0-2\pi$  的坐标区间平均分成  $n$  块,即有  $n$  个观测方

向,这  $n$  个观测方向同时参与计算,观察  $n$  的增加是如何影响  $\sigma$  的变化的,以至于影响网平差的,此时  $B$  矩阵的结构为:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ M & M \\ \cos i \times \frac{2\pi}{n} & \sin i \times \frac{2\pi}{n} \\ M & M \\ \cos 2\pi & \sin 2\pi \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中  $i$  的取值范围为  $1-n$ 。

本例子取  $n$  的最大值为  $45$  进行讨论。经对各种情况的  $B$  矩阵进行奇异值分解后,得其结果如图 3.2:

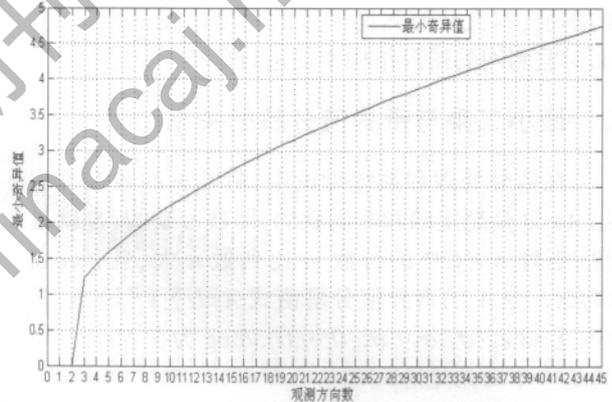


图 3.2 最小奇异值随观测方向个数增加而变化的情况

通过对图形我们可以看出,观测值的方向由  $2$  个增加到  $3$  个这个过程中,  $\sigma$  的变化最为明显,直接

从  $0$  上升到了  $1$  之上,由公式  $\hat{x} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} P_i b$

可知,此时网平差的精度大大提高;而当观测值方向由  $3$  个逐渐增加到  $45$  个的过程中,  $\sigma$  的变化曲线逐渐趋于平滑,  $\sigma$  的值也在随着观测方向个数的递增而增大,但是增大的速度则越来越慢,此时由于  $\sigma$  始终是大于  $1$  的,所以误差一直被缩小相应倍数,误差被缩小的倍率逐渐减小。由此可知当观测值方向个数超过  $3$  个时,参与到计算的观测值越多,观测的网形越趋完整,所以误差的放大倍率逐渐减小。

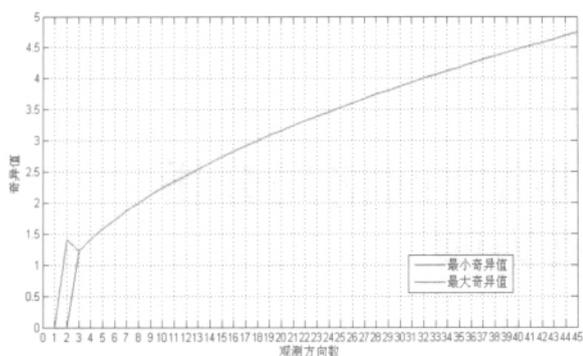


图 3.3 随观测方向个数的增加最大、最小奇异值的变化情况

下面,将此情况时的奇异值的最大、最小值进行比较分析。如图 3.3 所示:

通过对图形的分析我们可以看出,只有在只有两个观测值时奇异值的最大、最小值相差较大,在参与计算的观测值个数大于 3 个时,奇异值的最大、最小值曲线完全重合,也就是说在观测值个数超过 3 个时,由于是将  $0-2\pi$  的坐标区间平均分为  $n$  份,所以当观测值方向个数(即  $n$ )固定时,平差网的系数矩阵的奇异值的最大值和最小值之间并无差异。但是当观测方向个数增加时,  $\sigma$  的变化即如图 3.2 所示。

对于为何当观测方向数固定时,平差网的基元结构没有影响奇异值的最大值和最小值之间产生差异将在第三种情况进行分析。

3、从上例所示的 2 至 45 种分块情况中,我们抽出其中观测方向数为 15、25、35 和 45 这四种情况进行对比分析。在这四种情况中,我们令观测方向数分别从 2 逐渐增加到 15、25、35 和 45,每种情况直接将  $0-2\pi$  的坐标区间平均分为  $n$  等份,但是并不是所有数据同时参加计算,而是从 0 方向由小到大逐一参与计算,直至方向数等于 15、25、35 和 45 时才将  $0-2\pi$  的坐标区间取满。其结果如图 3.4 所示:

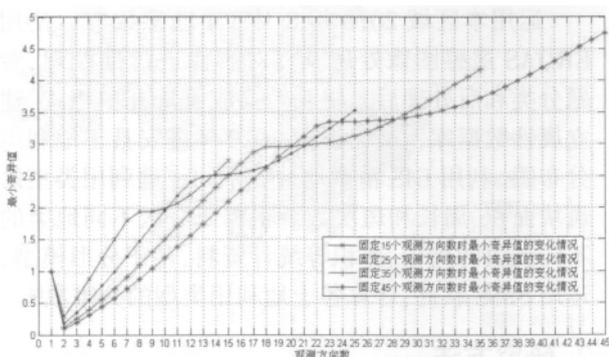


图 3.4 观测方向个数固定时,最小奇异值随观测方向个数逐渐增加的变化情况

通过对图形的分析可知,当观测方向数固定为 15 个、25 个、35 个和 45 个时,当起始只有一个观测方向时最小奇异值均为 1,当参与计算的观测方向数增加到两个时,最小奇异值迅速下降到 1 以下,此时的网形较差,之后,随着参与计算的观测方向数的增加最小奇异值也在增大,在增加到固定方向数一半的时候奇异值增加较为平缓,因为此时恰好是将  $0-2\pi$  的坐标区间取了一半,网形较不稳定;由图我们亦可看出,在参与计算的观测方向数未达到固定观测数一半的时候,在相同的观测方向数时,将坐标轴平分的分数越少,则最小奇异值越大,

对误差放大倍数越小,此情况可由公式  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} P_i b$

中的  $P_i$  的取值较小来解释。

在上述抽样条件下,我们对四种情况下的最大奇异值和最小奇异值进行对比分析。其结果如图 3.5 所示:

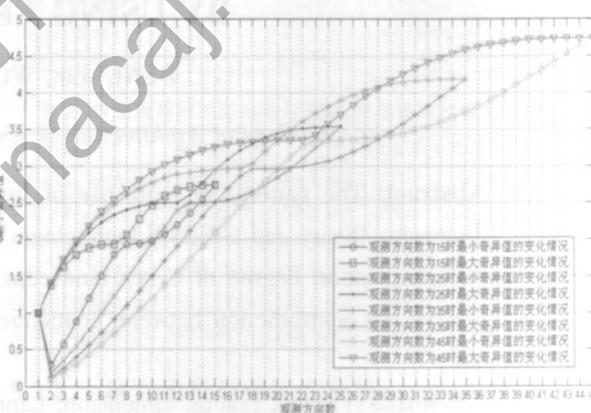


图 3.5 观测方向个数固定时,最大、最小奇异值随观测方向个数逐渐增加的变化情况

通过对图形的分析可知,起始当只有一个观测方向时,奇异值的最大最小值是相等的,因为此时系数矩阵  $B$  为一行两列,所以当对  $B$  奇异值分解时只有一个值。当观测方向数由 2 逐渐增加到固定的观测方向数 15、25、35 和 45 时,也就是参与计算的观测方向值取满坐标轴一周时,当取值增加到固定观测数的一半的时候,就是与起始方向成 180 度的时候,  $\sigma$  的最大值与最小值相差最小;当增加到固定观测数的 1/4 与 3/4 时,即与起始方向垂直时,  $\sigma$  的最大值与最小值相差最大,此情况可由图 3.1 进行解释;当观测方向个数增加到固定观测数时,即为图 3.3 所示情况,将  $0-2\pi$  的坐标区间 15、25、

(下转第 16 页)

下, 它们的结构最稳定。林地的稳定性指数介于其他类型之间, 它们受到一定程度的人为干预。未利用土地的稳定性指数最小, 未受到人类活动的影响, 所以它的结构最不稳定, 即处于完全自然状态。

#### 4 结论

应用分形理论研究土地利用空间格局, 对于揭示土地利用斑块的稳定性, 土地资源合理利用, 促进区域土地可持续利用来说, 不失为一种重要工具。运用该方法对金溪镇的土地利用结构进行了分析, 得出以下结论:

(1) 通过对各类土地的分形建模, 得出了各土地利用类型的复杂程度是水域>未利用土地>林地>耕地>园地>住宅用地。稳定性程度是住宅用地>园地>耕地>林地>水域>未利用地。

(2) 人类活动较为强烈的耕地、园地、住宅用地等单块面积较大的土地利用景观要素因其特殊的社会功能, 土地内部较为稳定, 斑块边缘较为规则, 故而这些土地利用景观要素在自然状态下, 抵御外来干扰、维持其形态的能力较强。镶嵌在土地利用现状图上的未利用地稳定指数最低, 其抵御外来干扰、维持其形态的能力就较弱。

(3) 针对整个研究区而言, 各土地利用类型平均分维值为 1.33, 偏离随机运动值 (1.500) 较大, 稳定性指数在 0.2~0.3 之间的各土地利用类型的面积占全镇土地总面积的 57.95%, 这些数值表明, 随着城镇建设的进一步发展, 在人为规划的影响下, 金溪镇土地利用总的发展趋势逐渐趋于稳定, 但仍需在以后的土地利用总体规划时, 进一步考虑基于自然地理条件的人为干涉措施的合理性, 以使得全镇土地利用向更科学更合理的方向发展。

#### 参考文献

- [1] 鲁恒, 李永树等. RS 与 GIS 在沪桥镇土地利用类型分形研究中的应用[J]. 测绘, 2009, 32(2)。
- [2] 谢力扎提·哈布尔, 高敏华等. 基于分形理论的哈巴河县土地利用类型分析[J]. 安徽农学通报, 2010, 16(7)。
- [3] 王鹏, 张家其, 田亚平等. 基于分形理论的土地利用时空变化特征分析—以常宁市松柏镇为例[J]. 国土与自然资源研究, 2011: 39-41。
- [4] 曹雅坤. 基于分形维数和信息熵的土地利用景观格局变化研究—以西安市为例[J]. 地下水, 2012, 34(4)。
- [5] 潘竟虎, 石培基. 基于洛伦茨曲线和分形的甘肃省土地利用空间结构分析[J]. 农业系统科学与综合研究, 2008, 24(2)。
- [6] 郭朝伟, 文星跃. 丘陵区小城镇土地利用景观空间格局分析—以绵阳市文昌镇为例[J]. 绵阳师范学院学报, 2010, 29(8)。

(上接第 13 页)

35 和 45 等分取满时,  $\sigma$  的最大值与最小值一致。

#### 4 结论

根据以上三种情况进行数据计算, 通过对计算结果的分析我们知道了网平差的观测方向是如何影响系数矩阵  $B$  的结构的, 以至于影响系数矩阵  $B$  的奇异值分解, 从而是如何影响到网平差的误差分配的。

由此可以得出, 决定平差精度的最重要指标就是系数矩阵  $B$  的奇异值分解  $\sigma$  的好坏, 研究  $\sigma$  成了研究网平差结果好坏的最重要的因素。

#### 参考文献

- [1] 周江文. 经典误差理论与抗差估计[J]. 测绘学报, 1989, 18(2): 115-120
- [2] 李德仁. 论空间数据挖掘和知识发现的理论与方法[J]. 武汉大学学报, 2002, 27(3): 221-233
- [3] 杨元喜. 大地测量相关观测抗差估计理论 [J]. 测绘学报, 2002, 31(2): 95-99
- [4] 刘经南, 姚宜斌, 施闯. 基于等价方差-协方差阵的稳健最小二乘法估计理论研究[J]. 测绘科学, 2000, 25(3): 1-7
- [5] 欧吉坤. 粗差的拟准检定法 (QUAD 法) [J]. 测绘学报, 1999, 28(1): 15-20
- [6] 王振杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究 [D]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2003. 1-12
- [7] 林洪桦. 测量误差与不确定度评估 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2010. 2-6.
- [8] 杨春燕, 蔡文. 可拓工程[M]. 北京: 科学出版社, 2007. 18-24.
- [9] Stephane Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing[M]. Beijing: China Matchine Press, 2007. 122-282
- [10] Tom M. Apostol. Mathematical Analysis [M]. Beijing: China Matchine Press, 2006. 251-271.
- [11] Dwight F. Mix, Kraig J. Olejniczak. Elements of Wavelets for Engineers and Scientists[M]. Beijing: China Matchine Press, 2006. 1-54.
- [12] David Kincaid, Ward Cheney. Numerical Analysis [M]. Beijing: China Matchine Press, 2005. 147-362.
- [13] 张国华, 张文娟, 薛鹏翔. 小波分析与应用基础[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006. 2-22.
- [14] 陈锴. GNSS 电离层延迟模型与观测建模的算子最小二乘法理论[D]. 武汉: 武汉大学, 2008. 2-22